

che Kristalle sich dazu eignen. Sie erklärt die optischen Spektren und die Energieübertragung. Speziell für das Naphthalin, zur Ergänzung der vorhergehenden Arbeit<sup>1</sup>, soll noch abschließend gezeigt werden, welche Rückschlüsse auf das freie Molekül die Beobachtungen an Kristallen, und zwar insbesondere an der DAVYDOV-Aufspaltung, ermöglichen.

Theoretische Berechnungen der Anregungsenergie von Molekülen machen ja exakte Angaben über deren Symmetrie und damit über die Polarisation der Übergänge. Messung dieser Polarisation bedeutet die einzige scharfe experimentelle Prüfung der Theorie. Nach der hier skizzierten Theorie der Kristallspektren sollte nunmehr ein eindeutiger Rückschluß auf die Polarisation im Einzelmolekül möglich sein, wie er in der Theorie von DAVYDOV noch fehlt.

Das Übergangsmoment für den 1. Übergang des Naphthalinmoleküls im Naphthalinkristall liegt ohne Zweifel nicht nur für die Schwingungsbanden,

sondern, wie oben gezeigt, auch für die 0.0-Linien parallel der kurzen Molekülachse (Tab. 1). Wir glauben, daß dies auch für das Molekül in Lösung und damit für das freie Molekül gilt: Die mittlere Intensität der 0.0-Komponenten im Kristall ist etwa die gleiche wie in Lösung, und die Spektren sind einander so ähnlich, daß kaum ein Grund zur Annahme besteht, die im Kristall gemessene Polarisation könnte durch eine Deformation des Moleküls im Kristall erst induziert worden sein.

Nach unseren Messungen möchten wir daher annehmen: wenn überhaupt aus den Kristallspektren auf das freie Molekül rückgeschlossen werden darf, dann steht eine Polarisation des 1. Überganges parallel der langen Achse<sup>3, 13, 14</sup> mit dem Experiment in Widerspruch. Auch das allen neueren Theorien<sup>13, 14, 15</sup> gemeinsame Ergebnis, daß 1. und 2. Übergang zueinander senkrecht polarisiert sind, — evtl. mit einem „zufälligen“ Verschwinden des Übergangsmomentes — findet in unseren Messungen keine Bestätigung.

<sup>13</sup> J. R. PLATT, J. Chem. Phys. **17**, 484 [1949].

<sup>14</sup> W. MOFFITT, J. Chem. Phys. **22**, 320 [1954].

<sup>15</sup> R. PARISER, J. Chem. Phys. **24**, 250 [1956].

## Die Beugung elektromagnetischer Wellen am unendlich langen Kreiszylinder

Von RUDOLF BURBERG

Aus dem Max-Planck-Institut für Virusforschung, Tübingen  
(Z. Naturforschg. **11 a**, 800—806 [1956]; eingegangen am 10. Juli 1956)

Bei der Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an einem Körper in einem beliebigen Außenmedium, erhält man eine exakte Lösung, wenn es möglich ist, die MAXWELL-Gleichungen bei den gegebenen Randbedingungen zu lösen. Aber selbst bei den einfachen Bedingungen, daß das Außenmedium isotrop und unendlich ausgedehnt, der Körper isotrop, und die einfallende Welle linear polarisiert und eben ist, scheitert im allgemeinen die exakte Lösung des Beugungsproblems an den mathematischen Schwierigkeiten, — außer bei ganz wenigen Körperformen, wie Kugel und unendlich langem Kreiszylinder. Die Lösung für die Kugel hat zuerst MIE<sup>1</sup> angegeben. Die Lösung für den unendlich langen Kreiszylinder ist von SCHÄFER<sup>2</sup> mit der Einschränkung durchgeführt worden, daß die Zylinderachse senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der einfallenden Welle steht. In der vorliegenden Arbeit wird nun diese Einschränkung fallen gelassen und die Lösung bei beliebiger Lage der Zylinderachse gegeben.

Anschließend werden einige Sonderfälle diskutiert. Bei den meisten Sonderfällen wird nur das Verhalten des elektrischen Feldes im Innern des Zylinders verfolgt. Die Ergebnisse dieser Sonderfälle werden bei einer späteren Arbeit<sup>3</sup> benötigt, die sich mit der Lichtstreuung an endlich langen, schmalen Kreiszylindern beschäftigt.

### Die allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen in Zylinderkoordinaten

Mit den üblichen Bezeichnungen lauten die MAXWELL-Gleichungen in vektorieller Schreibweise:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E} = \text{rot} \mathfrak{H}; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = -\text{rot} \mathfrak{E}.$$

Mit der zeitlichen Abhängigkeit

$$\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E} = \epsilon \mathfrak{E} e^{i\omega t}; \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} = \mu \mathfrak{H} e^{i\omega t}$$

wird aus (1) für ein Raumgebiet mit einheitlichen Materialkonstanten  $\epsilon$ ,  $\sigma$ , mit  $\mu = 1$  und den Abkürzungen  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$  und  $\epsilon' = \epsilon - i \cdot 4\pi\sigma/\omega$ :

$$i\epsilon' \mathfrak{E} = \frac{\text{rot} \mathfrak{H}}{k}; \quad i\mathfrak{H} = -\frac{\text{rot} \mathfrak{E}}{k}. \quad (2)$$



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Wenn man alle vorkommenden Längenangaben auf die Wellenlänge bezieht und als Einheit der Länge  $\lambda/2\pi$  wählt, vereinfacht sich (2) zu:

$$i\epsilon' \mathfrak{E} = \text{rot } \mathfrak{H}; \quad i\mathfrak{H} = -\text{rot } \mathfrak{E}, \quad (3a)$$

außerdem gilt:  $\text{div } \mathfrak{H} = 0$  (3b)

und beim Fehlen von Raumladungen:

$$\text{div } \mathfrak{E} = 0. \quad (3c)$$

Im Fall des unendlich langen Kreiszylinders im unendlich ausgedehnten Außenraum gibt es zwei Raumgebiete mit einheitlichem  $\epsilon'$ :

1. Das Innere des Kreiszylinders,
2. Der Außenraum, für den  $\epsilon' = 1$  sei.

Die Grenzfläche zwischen den beiden Raumgebieten bildet die Mantelfläche des Zylinders.

Als Koordinaten führen wir Zylinderkoordinaten  $x, \varphi, z$  ein, wo  $x$  die Radial-,  $z$  die Axialkoordinate zum Kreiszylinder sein soll. Dies ist ein dem vorliegenden Problem angepaßtes Koordinatensystem, weil damit die Grenzfläche (der Zylindermantel) durch Konstantsetzen einer Koordinate beschrieben werden kann ( $x = X = \text{const}$ ).

Mit den Zylinderkoordinaten lauten jetzt die Gln. (3):

$$\epsilon' E_x = -\frac{i}{x} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + i \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \quad (4a)$$

$$\epsilon' E_\varphi = -i \frac{\partial H_x}{\partial z} + i \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (4b)$$

$$\epsilon' E_z = -\frac{i}{x} \frac{\partial (x H_\varphi)}{\partial x} + \frac{i}{x} \frac{\partial H_x}{\partial \varphi}, \quad (4c)$$

$$H_x = \frac{i}{x} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - i \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}, \quad (4d)$$

$$H_\varphi = i \frac{\partial E_x}{\partial z} - i \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (4e)$$

$$H_z = \frac{i}{x} \frac{\partial (x E_\varphi)}{\partial x} - \frac{i}{x} \frac{\partial E_x}{\partial \varphi}, \quad (4f)$$

$$\text{div } \mathfrak{E} = \frac{1}{x} \frac{\partial (x E_x)}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (4g)$$

$$\text{div } \mathfrak{H} = \frac{1}{x} \frac{\partial (x H_x)}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \quad (4h)$$

Die weitere Rechnung erfolgt in zwei Abschnitten: Als erstes werden die allgemeinen Lösungen zu dem System von partiellen Differentialgleichungen (4) mit unbestimmten Integrationskonstanten aufgesucht. Als zweites werden durch Einsetzen der Randwertbedingungen unseres speziellen Problems die Integrationskonstanten bestimmt.

Durch partielle Ableiten von (4g) nach  $z$  und Einsetzen von (4d) und (4e) in (4c) gelangt man schließlich zu einer Differentialgleichung, die nur noch eine Feldkomponente,  $E_z$ , enthält:

$$\epsilon' E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (5)$$

In analoger Weise erhält man eine ebenso lautende Gleichung für  $H_z$ . Die allgemeine Lösung für (5) ist, unter der Voraussetzung, daß nicht  $\epsilon' = h^2$  ist,

$$E_z = \sum_{j=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} [(a_{jm} \cos m \varphi + a_{jm}^* \sin m \varphi) Z_{jm}(y)] e^{i h z}, \quad (6)$$

$$H_z = \sum_{j=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} [(b_{jm} \cos m \varphi + b_{jm}^* \sin m \varphi) Z_{jm}(y)] e^{i h z}$$

mit  $y = x\sqrt{\epsilon' - h^2}$ ;  $Z_{1m}(y)$  und  $Z_{2m}(y)$  sind zwei linear voneinander unabhängige Zylinderfunktionen<sup>4</sup> der ganzzahligen Ordnung  $m$ .

Es läßt sich zeigen, daß auch für die übrigen Feldkomponenten die  $z$ -Abhängigkeit durch den Faktor  $e^{i h z}$  ausgedrückt wird. Dann erhalten wir nach Aus-

führung der partiellen Differentiation nach  $z$  und durch geeignetes Einsetzen der Gln. (4) ineinander:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{i}{\sqrt{\epsilon' - h^2}} \left[ -\frac{\partial H_z}{y \partial \varphi} + h \frac{\partial E_z}{\partial y} \right]; & H_x &= \frac{i}{\sqrt{\epsilon' - h^2}} \left[ \epsilon' \frac{\partial E_z}{y \partial \varphi} + h \frac{\partial H_z}{\partial y} \right]; \\ E_\varphi &= \frac{i}{\sqrt{\epsilon' - h^2}} \left[ h \frac{\partial E_z}{y \partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial y} \right]; & H_\varphi &= \frac{i}{\sqrt{\epsilon' - h^2}} \left[ h \frac{\partial H_z}{y \partial \varphi} - \epsilon' \frac{\partial E_z}{\partial y} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

<sup>1</sup> G. MIE, Ann. Phys., Lpz. **25**, 337 [1908].

<sup>2</sup> CL. SCHÄFER, Einführung in die theoretische Physik III, 1. Teil, Walter de Gruyter, Berlin 1952.

<sup>3</sup> R. BURBERG, Z. Naturforschg. **11a**, 807 [1956]; nachstehend.

<sup>4</sup> Alle Formeln, die Zylinderfunktionen betreffen, sind entnommen aus E. JAHNKE — F. EMDE, Funktionstafeln, Teubner 1938; Tabellenwerte siehe ebenda.

Durch  $E_z$  und  $H_z$  lassen sich also alle übrigen Komponenten ausdrücken. (6) in (7) eingesetzt gibt mit  $Z'_{jm}(y) = dZ_{jm}(y)/dy$  :

$$\left. \begin{aligned}
 E_x &= \frac{i}{\sqrt{\varepsilon' - h^2}} \sum_{j=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &\left[ -b_{jm}^* \frac{m Z_{jm}(y)}{y} + h a_{jm} Z'_{jm}(y) \right] \cos m \varphi \\ &+ \left[ b_{jm} \frac{m Z_{jm}(y)}{y} + h a_{jm}^* Z'_{jm}(y) \right] \sin m \varphi \end{aligned} \right\} e^{i h z}, \\
 E_{\varphi} &= \frac{i}{\sqrt{\varepsilon' - h^2}} \sum_{j=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &\left[ h a_{jm}^* \frac{m Z_{jm}(y)}{y} + b_{jm} Z'_{jm}(y) \right] \cos m \varphi \\ &+ \left[ -h a_{jm} \frac{m Z_{jm}(y)}{y} + b_{jm}^* Z'_{jm}(y) \right] \sin m \varphi \end{aligned} \right\} e^{i h z}, \\
 H_x &= \frac{i}{\sqrt{\varepsilon' - h^2}} \sum_{j=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &\left[ \varepsilon' a_{jm}^* \frac{m Z_{jm}(y)}{y} + h b_{jm} Z'_{jm}(y) \right] \cos m \varphi \\ &+ \left[ -\varepsilon' a_{jm} \frac{m Z_{jm}(y)}{y} + h b_{jm}^* Z'_{jm}(y) \right] \sin m \varphi \end{aligned} \right\} e^{i h z}, \\
 H_{\varphi} &= \frac{i}{\sqrt{\varepsilon' - h^2}} \sum_{j=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &\left[ h b_{jm}^* \frac{m Z_{jm}(y)}{y} - \varepsilon' a_{jm} Z'_{jm}(y) \right] \cos m \varphi \\ &+ \left[ -h b_{jm} \frac{m Z_{jm}(y)}{y} - \varepsilon' a_{jm}^* Z'_{jm}(y) \right] \sin m \varphi \end{aligned} \right\} e^{i h z}.
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die Gln. (6) und (8) zusammen stellen die gesuchte allgemeine Lösung des Systems von partiellen Differentialgleichungen (4) für ein einheitliches Raumgebiet  $\varepsilon' = \text{const}$  und  $\mu = 1$  dar.

### Die Darstellung der einfallenden Welle

Eine der Randbedingungen ist die einfallende Welle. Sie muß in eine Darstellung gebracht werden, die der Form der Gln. (6) und (8) entspricht, damit der später erfolgende Grenzflächenvergleich [siehe Gl. (15)] durchgeführt werden kann.

Die einfallende Welle soll eine linear polarisierte, ebene Welle sein mit den Einheitsvektoren  $\mathfrak{E}_0$ ,  $\mathfrak{H}_0$  und  $v_0$ , die die Schwingungsrichtungen des elektrischen bzw. des magnetischen Vektors und die Ausbreitungsrichtung der Welle angeben. Um die Lagebeziehung des Zylinders zur einfallenden Welle ausdrücken zu können, legen wir in den Zylinder ein rechtwinkliges Dreibein von Einheitsvektoren  $i$ ,  $j$ ,  $k$  so, daß  $k$  in die Richtung der Zylinderachse weist.  $i$  und  $j$ , die dann in Radialrichtung zeigen, beziehen wir so auf die Richtung der einfallenden Welle, daß  $i$  in die von  $k$  und  $v_0$  gebildete Ebene fällt, damit kommt dann  $j$  in die von  $\mathfrak{E}_0$  und  $\mathfrak{H}_0$  gebildete Ebene zu liegen (vgl. Abb. 1). Für die Zylinderkoordinaten  $x$ ,  $\varphi$ ,  $z$ , wo die  $z$ -Richtung mit  $k$  zusammenfällt, soll die Zählung des Winkels  $\varphi$  mit  $i$  beginnen. Der Winkel zwischen  $k$  und  $v_0$  heiße  $\alpha$ , der zwischen  $j$  und  $\mathfrak{E}_0$  heiße  $\beta$ ; dann ist, wie man

durch Ablesen der entsprechenden skalaren Produkte aus Abb. 1 leicht nachprüfen kann:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathfrak{E}_0 &= -i \cos \alpha \sin \beta + j \cos \beta + k \sin \alpha \sin \beta \\
 \mathfrak{H}_0 &= -i \cos \alpha \cos \beta - j \sin \beta + k \sin \alpha \cos \beta \\
 v_0 &= i \sin \alpha + k \cos \alpha
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und für einen beliebigen Ortsvektor:

$$r = i x \cos \varphi + j x \sin \varphi + k z. \quad (10)$$

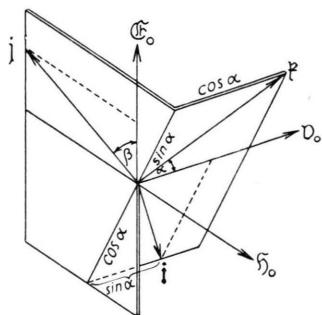


Abb. 1. Orientierung der körperfesten Einheitsvektoren zu den Einheitsvektoren der Primärwelle.

Mit (9) und (10) wird für den Betrag des zeitunabhängigen Faktors des elektrischen Vektors der einfallenden Welle<sup>5</sup>:

$$|\mathfrak{E}_1| = E_1 = \hat{E}_1 e^{-i(\varphi_0 t)} = \hat{E}_1 e^{-i(x \sin \alpha \cos \varphi + z \cos \alpha)},$$

oder nach seiner FOURIER-Reihe in bezug auf  $\cos \varphi$  zerlegt<sup>6</sup>:

$$E_1 = \hat{E}_1 \left\{ J_0(x \sin \alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} [2(-i)^m J_m(x \sin \alpha) \cos m \varphi] \right\} e^{-i \cos \alpha z}, \quad (11)$$

wo  $J_m(x \sin \alpha)$  die BESEL-Funktion  $m$ -ter Ordnung zum Argument  $x \sin \alpha$  bedeutet.

Mit (11) wird die  $z$ -Komponente von  $E_1$ :

$$E_{1z} = E_1 (\mathfrak{f} \mathfrak{E}_0) = \hat{E}_1 \sin \alpha \sin \beta \left\{ J_0(x \sin \alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} [2(-i)^m J_m(x \sin \alpha) \cos m \varphi] \right\} e^{-i \cos \alpha z}, \quad (12)$$

und wegen  $\hat{H}_1 = \hat{E}_1$  die  $z$ -Komponente von  $H_1$

$$H_{1z} = H_1 (\mathfrak{f} \mathfrak{H}_0) = \hat{E}_1 \sin \alpha \cos \beta \left\{ J_0(x \sin \alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} [2(-i)^m J_m(x \sin \alpha) \cos m \varphi] \right\} e^{-i \cos \alpha z}. \quad (13)$$

Setzen wir  $\epsilon' = 1$  (Außenraum) in (6) ein und vergleichen die Gln. (12) und (13) mit (6), so sehen wir, daß eine der beiden Reihen in (6) mit dem Index  $j$  – wir wollen hierfür die Reihe mit dem Index  $j=1$  verwenden –, mit den Darstellungen (12) und (13) identisch wird, wenn man setzt

$h = -\cos \alpha$  und damit  $y = y_1 = x\sqrt{1-h^2} = x \sin \alpha$ ;

$$Z_{1m}(y) = J_m(x \sin \alpha);$$

$$a_{10} = \sin \alpha \sin \beta \hat{E}_1; \quad a_{1m} = 2(-i)^m \sin \alpha \sin \beta \hat{E}_1;$$

$$b_{10} = \sin \alpha \cos \beta \hat{E}_1; \quad b_{1m} = 2(-i)^m \sin \alpha \cos \beta \hat{E}_1;$$

$$\text{alle } a_{1m}^* = b_{1m}^* = 0; \quad m = 1, 2, 3, \dots. \quad (14)$$

Mit (14) sind sämtliche Feldgrößen für die einfallende Welle in (6) und (8) bestimmt.

### Die übrigen Randbedingungen

Für die Darstellung der auslaufenden Welle ist eine Zylinderfunktion zu wählen, die sich für große  $y$  asymptotisch einem Ausdruck mit dem

<sup>5</sup> Der Index 1 bezeichne die Zugehörigkeit einer Feldgröße zur einfallenden Welle.

periodischen Anteil  $e^{-iy}$  nähert. Dieser Forderung genügt die HANKELSche Funktion  $H_m^{(2)}(y)$ , die hier abgekürzt  $H_m(y)$  geschrieben werde. Zur Unterscheidung von der einfallenden Welle soll die auslaufende Welle (Streuwelle) durch den Index 2 bezeichnet werden, so daß in (6) und (8)

$$Z_{2m} = H_m(y_2) \quad \text{mit } y_2 = y_1 = x\sqrt{1-h^2}$$

ist. Für die Auswahl der Zylinderfunktionen im Innern des Zylinders müssen wir beachten, daß nur solche Lösungen zugelassen werden können, für die die Feldstärken überall endlich bleiben. Diese Forderung erfüllt allein die BESSELSche Funktion  $J_m(y)$ , da die anderen Zylinderfunktionen für  $y=0$  unendlich werden. So haben wir es im Innenraum mit nur einer Zylinderfunktion zu tun. Zur Unterscheidung von der einfallenden und der Streuwelle erhalte die Welle im Innern des Zylinders den Index  $j=3$ . Dann ist  $Z_{3m} = J_m(y_3)$  mit  $y_3 = x\sqrt{\epsilon' - h^2}$ .

Schließlich ist eine Randbedingung die bekannte Stetigkeitsbedingung an der Grenzfläche zweier Medien für die Tangentialkomponenten von  $\mathfrak{E}$ , für die Normalkomponenten von  $\mathfrak{D}$  und den Leitungsstrom  $\sigma \mathfrak{E}$  und – weil innen und außen  $\mu=1$  ist – für sämtliche Komponenten von  $\mathfrak{H}$ . Tangentialkomponenten von  $\mathfrak{E}$  sind  $E_\varphi$  und  $E_z$ , Normalkomponente von  $\mathfrak{D}$  –  $i \cdot 4\pi \sigma/\omega \cdot \mathfrak{E} = \epsilon' \mathfrak{E}$  ist die  $x$ -Komponente  $\epsilon' E_x$ . Kennzeichnen wir unsere Grenzfläche, den Zylindermantel, durch  $x=X$ , und setzen wir für den Außenraum  $y(\epsilon'=1; X) = Y_1 = X\sqrt{1-h^2}$ , für den Innenraum  $y(\epsilon'; X) = Y_3 = X\sqrt{\epsilon' - h^2}$ , dann ergibt der Grenzflächenvergleich:

$$\begin{aligned} E_z(Y_1) &\equiv E_z(Y_3), & (a) & \quad H_z(Y_1) &\equiv H_z(Y_3), & (b) \\ E_\varphi(Y_1) &\equiv E_\varphi(Y_3), & (c) & \quad H_\varphi(Y_1) &\equiv H_\varphi(Y_3), & (d) \\ E_x(Y_1) &\equiv \epsilon' E_x(Y_3), & (e) & \quad H_x(Y_1) &\equiv H_x(Y_3), & (f) \end{aligned} \quad (15)$$

wobei die Gleichungen in bezug auf  $\varphi$  und  $z$  identisch erfüllt sein müssen. Sie sind es in bezug auf  $z$ , wenn  $h$  bei allen drei Wellen gleich ist. Für die Welle 1 ist  $h$  durch (14) festgelegt, damit ist für alle drei Wellen  $h = -\cos \alpha$ .

Benutzen wir die Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} A &= J_m(Y_1), & A' &= J'_m(Y_1), \\ B &= H_m(Y_1), & B' &= H'_m(Y_1), \\ C &= J_m(Y_3), & C' &= J'_m(Y_3), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

<sup>6</sup> RIEMANN-WEBER, Partielle Differentialgleichungen, 4. Auflage, Vieweg, Braunschweig 1900.

so erhält man aus (6) und (8) für jeweils das  $m$ -te Glied der Feldkomponenten, wenn man den Faktor  $e^{i\hbar z}$  wegläßt,

$$\left. \begin{aligned}
 E_z(Y_1) &= (a_{1m} A + a_{2m} B) \cos m \varphi + a_{2m}^* B \sin m \varphi, \\
 E_z(Y_3) &= a_{3m} C \cos m \varphi + a_{3m}^* C \sin m \varphi, \\
 H_z(Y_1) &= (b_{1m} A + b_{2m} B) \cos m \varphi + b_{2m}^* B \sin m \varphi, \\
 H_z(Y_3) &= b_{3m} C \cos m \varphi + b_{3m}^* C \sin m \varphi, \\
 E_\varphi(Y_1) &= i X \left\{ \frac{1}{Y_1} \left[ \frac{\hbar m}{Y_1} a_{2m}^* B + b_{1m} A' + b_{2m} B' \right] \cos m \varphi \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{Y_1} \left[ -\frac{\hbar m}{Y_1} (a_{1m} A + a_{2m} B) + b_{2m}^* B' \right] \sin m \varphi \right\}, \\
 E_\varphi(Y_3) &= i X \left\{ \frac{1}{Y_3} \left[ \frac{\hbar m}{Y_3} a_{3m}^* C + b_{3m} C' \right] \cos m \varphi \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{Y_3} \left[ -\frac{\hbar m}{Y_3} a_{3m} C + b_{3m}^* C' \right] \sin m \varphi \right\}, \\
 H_\varphi(Y_1) &= i X \left\{ \frac{1}{Y_1} \left[ \frac{\hbar m}{Y_1} b_{2m}^* B - a_{1m} A' - a_{2m} B' \right] \cos m \varphi \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{Y_1} \left[ \frac{\hbar m}{Y_1} (b_{1m} A + b_{2m} B) + a_{2m}^* B' \right] \sin m \varphi \right\}, \\
 H_\varphi(Y_3) &= i X \left\{ \frac{1}{Y_3} \left[ \frac{\hbar m}{Y_3} b_{3m}^* C - \varepsilon' a_{3m} C' \right] \cos m \varphi \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{Y_3} \left[ \frac{\hbar m}{Y_3} b_{3m} C + \varepsilon' a_{3m}^* C' \right] \sin m \varphi \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

und 4 weitere Gleichungen für  $E_x$  und  $H_x$ .

Setzt man die Feldkomponenten nach (17) in (15) ein, so werden die Gln. (15) in bezug auf  $\varphi$  nur dann identisch erfüllt, wenn die Faktoren von  $\cos m \varphi$  gleich sind und ebenso die von  $\sin m \varphi$  gleich sind. Das gibt 12 Gleichungen für jedes  $m$ . Davon wird das Gleichungspaar von (15 f) identisch mit dem von (15 c) und ebenso das von (15 e) identisch mit dem von (15 d), so daß 8 voneinander unabhängige Gleichungen für die 8 zu bestimmenden Koeffizienten  $a$  und  $b$  der Streu- und Innenwelle übrig bleiben.

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 l &= \hbar m \left( \frac{1}{Y_1^2} - \frac{1}{Y_3^2} \right) = \frac{\hbar m \Delta \varepsilon'}{Y_1^2 (\varepsilon' - \hbar^2)}; \\
 D &= \frac{A'}{Y_1 A}, \quad E = -\frac{B'}{Y_1 B}, \quad F = \frac{C'}{Y_3 C}, \\
 N &= (E + F)(E + \varepsilon' F) - l^2
 \end{aligned}$$

ergibt das Gleichungssystem, nach den Unbekannten aufgelöst,

$$\left. \begin{aligned}
 a_{2m} &= \frac{(E+F)(D-\varepsilon' F) + l^2}{N} \frac{A}{B} a_{1m}, \\
 b_{2m} &= \frac{(E+\varepsilon' F)(D-F) + l^2}{N} \frac{A}{B} b_{1m}, \\
 a_{2m}^* &= \frac{l(E+D)}{N} \frac{A}{B} b_{1m}, \\
 b_{2m}^* &= \frac{-l(E+D)}{N} \frac{A}{B} a_{1m},
 \end{aligned} \right\} \quad (18a)$$

$$\left. \begin{aligned}
 a_{3m} &= \frac{(E+D)(E+F)}{N} \frac{A}{C} a_{1m}, \\
 b_{3m} &= \frac{(E+D)(E+\varepsilon' F)}{N} \frac{A}{C} b_{1m}, \\
 a_{3m}^* &= \frac{l(E+D)}{N} \frac{A}{C} b_{1m}, \\
 b_{3m}^* &= \frac{-l(E+D)}{N} \frac{A}{C} a_{1m}.
 \end{aligned} \right\} \quad (18b)$$

Mit den Gln. (18) sind nun sämtliche in (6) und (8) vorkommenden Integrationskonstanten bestimmt, so daß wir jetzt in der Lage sind, die Feldkomponenten der Streuwellen und der Welle im Innern des Zylinders anzuschreiben.

Die Feldkomponenten der Wellen erhält man, wenn man in (6) und (8) die in (19) aufgeführten Werte einsetzt:

für	Welle 2=Streuwelle (Außenraum)	Welle 3 (Innenraum)
$h$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\epsilon'$	1	$\epsilon'$
$y$	$y_1 = x \sin \alpha$	$y_3 = x \sqrt{\epsilon' - h^2}$
$Z_{jm}(y)$	$H_m(y_1)$	$J_m(y_3)$
$a_{jm}; a_{jm}^*$	$a_{2m}; a_{2m}^*$	$a_{3m}; a_{3m}^*$
$b_{jm}; b_{jm}^*$	$b_{2m}; b_{2m}^*$	$b_{3m}; b_{3m}^*$

(19)

Damit ist die Lösung der MAXWELL-Gleichungen für den unendlich langen Kreiszylinder, der sich in beliebiger Lage zu einer ebenen, linear polarisierten einfallenden Welle befindet, gefunden.

### Sonderfälle

#### 1. $\alpha = 0$

Bei der Lösung der Differentialgleichung (5) durch Zylinderfunktionen ist der Fall  $\epsilon' - h^2 = 0$  ausgeschlossen worden. Für den Außenraum ( $\epsilon' = 1$ ) und  $\alpha = 0$  tritt dieser Fall aber ein, so daß für die Außenwelle die Gl. (6) durch eine neue Lösung ersetzt werden muß. Ohne auf die neue Lösung einzugehen, sei hier nur mitgeteilt, daß für das Innenfeld — soweit es sich um eine Erregung durch das Außenfeld handelt —, der Wert Null herauskommt<sup>7</sup>. Dasselbe Ergebnis erhält man übrigens auch, wenn man in (18) die Grenzwerte für  $\alpha \rightarrow 0$  bzw.  $Y_1 \rightarrow 0$  bildet. Das bedeutet: Liegt die Zylinderachse in der Ausbreitungsrichtung des Primärstrahles, so bildet sich im Innern des Zylinders kein Feld aus.

#### 2. $l = 0$

Es ist  $l = 0$ , wenn entweder  $m = 0$  ist, oder wenn  $h = 0$  ist, also  $\alpha = 90^\circ$ , d. h. die Zylinderachse senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung des einfallenden Lichtes steht. Dann nehmen die Gln. (18) die beson-

ders einfache Form an:

$$\left. \begin{aligned} a_{2m} &= \frac{D - \epsilon' F}{E + \epsilon' F} \frac{A}{B} a_{1m}, & b_{2m} &= \frac{D - F}{E + F} \frac{A}{B} b_{1m}, \\ a_{3m} &= \frac{E + D}{E + \epsilon' F} \frac{A}{C} a_{1m}, & b_{3m} &= \frac{E + D}{E + F} \frac{A}{C} b_{1m}, \\ a_{2m}^* &= b_{2m}^* = a_{3m}^* = b_{3m}^* = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Die von SCHÄFER<sup>2</sup> für  $\alpha = \beta = 90^\circ$  für die Streuwellen aus den MAXWELL-Gleichungen direkt hergeleitete Formel stimmt mit  $a_{2m}$  in (20) überein.

Zu den mit Stern versehenen Koeffizienten ist noch zu bemerken: Nach (14) sind die  $a_{1m}^*$  und  $b_{1m}^*$ , die sin  $m\varphi$ -Komponenten von  $E_z$  und  $H_z$  der Primärwelle, Null. Für die sin  $m\varphi$ -Komponenten der Streu- und Innenwelle ergibt sich aus der Behandlung der vorgenannten Sonderfälle, daß sie für  $\alpha = 0^\circ$  und  $\alpha = 90^\circ$  ebenfalls Null sind, für andere Winkel  $\alpha$  aber nicht; bei diesen Winkeln treten also bei der Streu- und Innenwelle Komponenten auf, die die einfallende Welle nicht enthält. Nur wenn die Einfallsrichtung des Primärlichtes mit einer Symmetriechse des Zylinders zusammenfällt ( $\alpha = 0^\circ$  und  $90^\circ$ ), verschwinden diese neu auftretenden Komponenten. Wir können jetzt verstehen, warum diese Komponenten weder bei SCHÄFER<sup>2</sup>, noch entsprechende Komponenten bei der Kugel<sup>1</sup> auftreten, bei der jede Richtung Symmetriechse ist.

#### 3. $x = 0$

Zur Darstellung der Feldstärke an der Stelle  $x = 0$  (Ort der Zylinderachse) gehen wir zu einer Komponentendarstellung in kartesischen Koordinaten mit den Richtungen  $i$ ,  $j$ ,  $f$  über. Dann ist

$$\begin{aligned} E_i &= E_x \cos \varphi - E_\varphi \sin \varphi, \\ E_j &= E_x \sin \varphi + E_\varphi \cos \varphi, \\ E_f &= E_z. \end{aligned} \quad (21)$$

Setzt man die  $E_x$ ,  $E_\varphi$ - und  $E_z$ -Komponenten nach (6) und (8) unter Benutzung der in (19) angegebenen Größen für die Welle 3 in (21) ein und geht zum Wert  $y_3 = 0$  über, dann erhält man

$$\begin{aligned} E_{i3} &= \frac{i}{2\sqrt{\epsilon' - h^2}} (h a_{31} - b_{31}^*), \\ E_{j3} &= \frac{i}{2\sqrt{\epsilon' - h^2}} (h a_{31}^* + b_{31}), \\ E_{f3} &= a_{30}. \end{aligned} \quad (22)$$

#### 4. Die mittlere elektrische Feldstärke im Innern sehr dünner Zylinder

Für die angekündigte Arbeit<sup>3</sup> wird der Ausdruck für die über den Zylinderquerschnitt gemittelte elektrische Feldstärke bei Zylindern benötigt, deren Durchmesser klein gegenüber der Wellenlänge ist

<sup>7</sup> Daneben gibt es noch eine von der einfallenden Welle unabhängige Lösung, die Drahtwelle (vgl. A. SOMMERFELD, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. III, Dieterische Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1948).

( $X \ll 1$ ). Dabei ergibt sich die Vereinfachung, daß wegen der geringen Ausdehnung des Querschnitts Phasenunterschiede zwischen den Feldstärken verschiedener Bezirke eines Querschnitts vernachlässigt werden können. Zur Mittelwertsbildung benutzen wir wieder die Darstellung in kartesischen Koordinaten. Wenn man die BESSEL-Funktionen durch ihre Potenzreihenentwicklung ersetzt und Glieder zweiter und höherer Ordnung vernachlässigt, dann ergeben sich für die gemittelten Komponenten ebenfalls die Gln. (22). Das bedeutet: Die über den Querschnitt gemittelte Feldstärke ist bei dünnen Zylindern gleich der Feldstärke im Querschnittszentrum.

Ersetzt man die Zylinderfunktionen  $Z_{jm}(Y)$  in (16) durch ihre abgebrochenen Potenzreihen, so wird aus (22):

$$\left. \begin{aligned} E_{i3} &= \frac{2}{\varepsilon' + 1 - e Y_3^2} \cdot E_{i1} \quad \text{mit } E_{i1} = \hat{E}_1(i \mathfrak{E}_0), \\ E_{j3} &= \frac{2}{\varepsilon' + 1 - e Y_3^2} \cdot E_{j1} \quad \text{mit } E_{j1} = \hat{E}_1(j \mathfrak{E}_0), \\ E_{f3} &= 1 \cdot E_{f1} \quad \text{mit } E_{f1} = \hat{E}_1(f \mathfrak{E}_0), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

wobei  $e = \ln \frac{2}{\gamma Y_1} - i \frac{\pi}{2}$  und  $\gamma = 1,781$  die EULERSche Konstante<sup>4</sup> ist.

Die Abhängigkeit des in (23) vorkommenden Nenners  $\varepsilon' + 1 - e Y_3^2$  vom Winkel  $\alpha$  soll noch näher untersucht werden:

Für  $\alpha = 0$  wird  $e$  unendlich, so daß  $E_{i3} = E_{j3} = 0$  sind, in Übereinstimmung mit Sonderfall 1 ( $E_{f3}$  ist ebenfalls Null, da  $(f \mathfrak{E}_0) = 0$ ).

Für einen bestimmten Winkel  $\alpha$  – er heiße der Resonanzwinkel  $\alpha_r$  – ist der Realteil des Nenners Null:

$$\Re(\varepsilon' + 1 - e Y_3^2) = \varepsilon + 1 - Y_3^2 \ln \frac{2}{\gamma Y_1} = 0. \quad (24 \text{ a})$$

Für einen nichtleitenden Zylinder ist dann für den Resonanzwinkel der Betrag

$$|\varepsilon' + 1 - e Y_3^2| = Y_3^2 |\Im e| = Y_3^2 \frac{\pi}{2}; \quad (24 \text{ b})$$

wegen  $Y_3 \ll 1$  ist dies ein sehr kleiner Wert, so daß  $E_{i3}$  und  $E_{j3}$  einen sehr großen Wert annehmen.

Die Größe des Resonanzwinkels erhalten wir aus (24 a). Ersetzt man in (24 a)  $\sin \alpha$  durch  $\alpha$ , so erhält man

$$\alpha_r = \frac{2}{\gamma X} \exp \left[ -\frac{\varepsilon + 1}{X^2(\varepsilon - 1)} \right]. \quad (24 \text{ c})$$

Für  $\varepsilon = 1,44$  (Eiweiß gegen Wasser) und  $X = 0,1$  ist z. B.  $\alpha_r = 10^{-274}$ . Der Resonanzwinkel liegt also bei dünnen Zylindern in einem engsten Winkelbereich um  $\alpha = 0$ .

Für größere  $\alpha$  ist sehr bald  $Y_3^2 \cdot \ln \frac{2}{\gamma Y_1} \ll |\varepsilon' + 1|$ , so daß jetzt gilt:

$$\left. \begin{aligned} E_{i3} &= \frac{2}{\varepsilon' + 1} \cdot E_{i1}, \\ E_{j3} &= \frac{2}{\varepsilon' + 1} \cdot E_{j1}, \\ E_{f3} &= 1 \cdot E_{f1}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Bei Lichtstreuungsmessungen an regellos orientierten Teilchen kann man die oben besprochenen Abweichungen von (25), die um den engsten Winkelbereich um  $\alpha = 0^\circ$  auftreten, vernachlässigen; denn wegen der Kleinheit von  $\alpha_r$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Achsenrichtung des Zylinders innerhalb des von  $\alpha_r$  gebildeten Kegels zu liegen kommt, verschwindend gering.

In (25) liegen die i- und j-Komponenten definitionsgemäß quer zur Zylinderachse, die f-Komponente in Richtung der Zylinderachse. In der Elektrostatik gilt für das (hier homogene) Innenfeld eines unendlich langen Kreiszylinders, der sich in einem homogenen Außenfeld befindet, dasselbe Verhältnis von Innenfeld zu Außenfeld für die Quer- bzw. Längskomponenten wie in (25). Das Ergebnis von (25) kann also in Worten auch so ausgedrückt werden: Beim sehr dünnen, unendlich langen Kreiszylinder verhalten sich die gemittelten elektrischen Feldstärken des Innenfelds zu den Außenfeldstärken wie in der Elektrostatik.

Für den Winkel  $\alpha = 90^\circ$ , wenn der dünne Zylinder in jedem Augenblick seiner ganzen Länge nach – wie bei den Streukörpern der RALEIGH-Theorie der Lichtstreuung – als von einem homogenen Feld eingebettet aufgefaßt werden kann, war das Ergebnis von (25) zu erwarten. Nicht vorher zu sehen war, daß dieselbe Beziehung auch für die übrigen Winkel gilt, bei denen der Zylinder in jedem Augenblick der Länge nach in dem Streifenmuster eines in der Stärke sinusförmig abwechselnden Außenfeldes liegt.

### 5. $\varepsilon' \rightarrow 1$

Für den Übergang  $\varepsilon' \rightarrow 1$  in (18) wird  $a_{3m} = a_{1m}$ ;  $b_{3m} = b_{1m}$ ;  $a_{3m}^* = b_{3m}^* = 0$ , und der Bereich um  $\alpha = 0$  mit seinen Besonderheiten verschwindet, da nach (24 c)  $\varepsilon - 1$  im Nenner des Exponenten steht. Somit wird für alle Lagen die Innenfeldstärke gleich der Außenfeldstärke, wie vernünftigerweise zu fordern ist.

Herrn Prof. Dr. H. FRIEDRICH-FREKSA und der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für ihre Unterstützung bei dieser Arbeit.